30/09/2014

1) $\begin{pmatrix} 2\pi & \log_2 8 & 2 \\ \log_{10} 5 & -1 & 8 \\ 3^2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi & -1 & 3 \\ \log_{10} 2 & 2 & 2^{\pi} \\ 3^5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = ?$

N.B $\log_2 8 = 3$

$= \begin{pmatrix} 2\pi-\pi & (\log_2 8)-1 & 2+3 \\ \log_{10}5+\log_{10}2 & -1+2 & 8+2^{\pi} \\ 3^2+3^5 & 0+1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 8+2^{\pi} \\ 252 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ?$

N.B. $\log_{10}5 + \log_{10}2 = \log_{10}10 = 1$

↑ non si può fare perché le due matrici non sono della stessa taglia

3) $3\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 3 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = ?$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{1}{3} & 1\cdot 3 & -\frac{2}{3}\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & \frac{5}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 3 \\ 0\cdot 3 & -\frac{2}{3}\cdot 3 & \frac{8}{3}\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

4) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 3 \\ 5 & \log_2 32 \end{pmatrix} = ?$ $\quad \log_2 32 = 5$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cdot 1 & -10\cdot\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}\cdot 2 & 3\cdot\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}\cdot 5 & 5\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{1\times 3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = ?$ $\Rightarrow$ taglia finale: 1×1

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

6) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{1\times 3} = ?$ $\Rightarrow$ taglia finale: 3×3

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = ?$

$2\times2 \quad 2\times2$

$\Downarrow$

$\text{taglia}_F: 2\times2$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot2+1\cdot2 & 1\cdot3+1\cdot1 \\ -1\cdot2+1\cdot2 & -1\cdot3+1\cdot1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = ?$

$2\times2 \quad 2\times2$

$\Downarrow$

$\text{taglia}_F = 2\times2$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot(-1) & 2\cdot1+3\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot(-1) & 2\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = ?$

$2\times2 \quad 2\times3$

$\Downarrow$

$\text{taglia}_F = 2\times3$

$= \begin{pmatrix} 7\cdot1+6\cdot(-1) & 7\cdot2+6\cdot(-1) & 7\cdot3+6\cdot(-1) \\ (-1)\cdot1+1\cdot(-1) & (-1)\cdot2+1\cdot(-1) & (-1)\cdot3+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = ?$

$2\times2 \quad 3\times2$

non si può fare perché questo e questo sono $\neq$ tra loro

10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = ?$

$3\times3 \quad 3\times4$

$\Downarrow$

$\text{taglia}_F = 3\times4$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot5+1\cdot1+0\cdot2 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot2 & 0\cdot3+1\cdot4+0\cdot3 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 \\ 3\cdot5+(-1)\cdot1+2\cdot2 & 3\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot2 & 3\cdot3+(-1)\cdot4+2\cdot3 & 3\cdot1+(-1)\cdot0+2\cdot2 \\ 2\cdot5+(-2)\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot1+(-2)\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot3+(-2)\cdot4+3\cdot3 & 2\cdot1+(-2)\cdot0+3\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 18 & 6 & 11 & 10 \\ 14 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = ?$

$3\times3 \quad 3\times3$

$\Downarrow$

$\text{taglia}_F = 3\times3$

Master Cozy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot5+(-1)\cdot3+1\cdot(-2) & 1\cdot6+(-1)\cdot2+1\cdot3 & 1\cdot1+(-1)\cdot3+1(-2) \\ 2\cdot5+(-1)\cdot3+2(-2) & 2\cdot6+(-1)\cdot2+2\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot3+2(-2) \\ (-1)\cdot5+0\cdot3+(-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot6+0\cdot2+(-1)\cdot3 & (-1)\cdot1+0\cdot3+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ 3 & 16 & -5 \\ -3 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

(12)

$$3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^2 = ?$$

$$= 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 24 \\ -7 & 34 \end{pmatrix}$$

N.B. $(\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), \oplus, \cdot)$ non è uno spazio vettoriale
$(\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

(13) $(\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), \oplus, \cdot)$ è uno spazio vettoriale?

$(A \oplus B = AB) \longrightarrow \oplus$ = prodotto tra matrici

① $A \oplus B \overset{?}{=} B \oplus A \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

$\Updownarrow$

$AB \neq BA \Rightarrow$ No, rispetto al prodotto tra matrici questo insieme non è uno spazio vettoriale, ma lo è rispetto alla somma normale tra matrici.

(14) $(\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

Dimostrazione

① Dobbiamo dimostrare che $A+B = B+A \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

⇒ basta vedere che hanno la stessa taglia e che

$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (B)_{ij} + (A)_{ij} = (B+A)_{ij}$ (questo perché quanto detto nel punto 1 vale anche dopo il punto zero)

③ Chi è lo zero?

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x_1 & b+x_2 \\ c+x_3 & d+x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a + x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ b = b + x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \\ c = c + x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \\ d = d + x_4 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④ $\forall A \quad -A = (-1)\cdot A$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Es. x🏠 7/10/14

1) Dimostrare che:

1.1) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

1) $0 \overset{?}{\in} W$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W \rightarrow$ Sì perché $0^2=0$ ok

2) $v + w \overset{?}{\in} W$

$v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \quad w\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \rightarrow v+w\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\v_3+w_3\end{pmatrix}$

$v_2^2 + w_2^2 = 0$ con $v_2 = 0$ e $w_2 = 0$ affinché $V \in W$ siano sottoinsieme

$\Rightarrow 0+0=0$ ok!

3) $\alpha v \overset{?}{\in} W$

$v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Rightarrow v_2^2 = 0$

$\alpha v\begin{pmatrix}\alpha v_1\\\alpha v_2\\\alpha v_3\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^2 v_2^2 = 0$ ok ☑

1.2) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

1) $0 \overset{?}{\in} W$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$5\cdot 0 + 2\cdot 0 - 0 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ ok

2) $v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W$

$v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in W \rightarrow \underline{5v_1 + 2v_2 - v_3 = 0}$

$w\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \in W \rightarrow 5w_1 + 2w_2 - w_3 = 0$

$v + w = \begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\v_3+w_3\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W \Rightarrow 5(v_1+w_1) + 2(v_2+w_2) - (v_3+w_3) \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{5v_1} + 5w_1 + \underline{2v_2} + 2w_2 - \underline{\quad v_3} - w_3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$

3) $\alpha v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W \qquad \alpha v = \begin{pmatrix}\alpha v_1\\\alpha v_2\\\alpha v_3\end{pmatrix}$

$v \in W \rightarrow 5v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$

mosel COZY CARTOLERIA 080/8312126 388/9837745

$5\alpha v_1 + 2\alpha v_2 - v_3 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$ OK

☒

1.3) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

1) $0 \stackrel{?}{\in} W$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow 0^2 \stackrel{?}{=} 1$ NO! $\Rightarrow$ no sottospazio vettoriale

☒

1.4) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = -1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

1) $0 \stackrel{?}{\in} W$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow 0^2 \stackrel{?}{=} -1$ NO! $\Rightarrow$ no sottospazio vettoriale

☒

1.5) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 0\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

1) $0 \stackrel{?}{\in} W$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$ OK

2) $v\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \stackrel{?}{\in} W \quad v+w = \begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\\v_3+w_3\end{pmatrix}$

$v \in W \Rightarrow v_1 v_2 = 0$

$w \in W \Rightarrow w_1 w_2 = 0$

$(v_1 + w_1)(v_2 + w_2) \stackrel{?}{=} 0$

$\Rightarrow v_1 v_2 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + w_1 w_2 \stackrel{?}{=} 0$ NO!

$\Rightarrow$ no sottospazio vettoriale

☒

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745